

DEVOIR SURVEILLÉ 4 - ESPACES VECTORIELS, POLYNÔMES, EQUA. DIFF

Durée : 3h

Calculatrices interdites dans ce sujet.

La présentation, la lisibilité, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les consignes suivantes sont à respecter sous risque d'absence de correction ou de notation, dans ce sujet ainsi que dans tous les suivants :

- Les résultats doivent être encadrés,
- Les pages doivent être numérotées,
- Chaque nouvel exercice ou nouveau problème commencera sur une nouvelle page. (Les exercices peuvent être traités dans l'ordre souhaité, mais les question d'un même exercice doivent être traitées dans l'ordre.)
- Tout résultat ou toute affirmation doit être dûment justifié(e).

Les téléphones portables doivent être rangés dans les sacs.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Chaque étudiant portera en tête de son devoir le tableau suivant :

Réd.	Rais.	Mod.	Calc.	Rech.	Représ.	Expl.	Cours

Ce sujet se décompose en 4 exercices et un problème indépendants. Les exercices 1,2,4 traitent des espaces vectoriels. Les polynômes seront abordés dans les exercices 3 et 4. Le problème étudie des modèles d'évolutions de populations au travers notamment d'équations différentielles.

EXERCICE 1 :

On considère $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications allant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On munit E d'une loi interne $\boxplus$ et d'une loi externe $\cdot$ définis de la manière suivante :

Pour tout $f, g \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f \boxplus g = f \circ g \quad ; \quad \lambda \cdot f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda(f(x))$$

où on rappelle que $f \circ g$ désigne la composition de g par f .

$(E, \boxplus, \cdot)$ est-il un espace vectoriel ?

EXERCICE 2 :

Soit $\mathcal{B} = (u, v, w)$ une famille de fonction définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = \sin(x), \quad v(x) = e^x, \quad w(x) = xe^x$$

1. a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre.
- b) En déduire la dimension de $E = \text{Vect}(u, v, w)$.

Soit $\mathcal{B}' = (f, g, h)$ une famille de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin x + e^x - 2xe^x, \quad g(x) = 2\sin x + 2e^x - 2xe^x, \quad h(x) = \sin x - e^x - xe^x$$

2. a) Justifier que $f, g, h \in E$, déterminer les coordonnées de f, g, h dans la base $\mathcal{B}$ et en déduire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
- b) En déduire que $\mathcal{B}'$ est également une base de E .

EXERCICE 3 :

On rappelle que pour tout polynôme réel P , on note P' son polynôme dérivé.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose P_n le polynôme

$$P_n = 1 + X + \frac{X^2}{2!} \dots + \frac{X^n}{n!}.$$

1. Exprimer P'_n en fonction de P_{n-1} .
2. Exprimer maintenant P_n en fonction de P_{n-1} et de X^n .
3. Supposons α une racine réelle de P_n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer alors que α ne peut pas être une racine multiple.
4. On admettra que ce résultat se généralise aux racines complexes. Combien de racines existe-t-il alors exactement au total (réels et complexes confondus) ?

EXERCICE 4 : Soient $F = \left\{ f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}$ où $\mathcal{C}([0, 1])$ désigne l'ensemble des fonction continue sur leur l'intervalle fermé $[0, 1]$, et $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On pose de plus dans cet exercice R_n l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients réels, de degré inférieur ou égale à n .

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Justifier que $R_n \cap F$ est bien défini et que c'est également un espace vectoriel de dimension finie. Donner un majorant simple de la dimension.
3. Déterminer une famille génératrice de $R_n \cap F$ et en déduire sa dimension.

PROBLÈME 1 :**CROISSANCE D'UNE POPULATION SANS INTERACTION**

Dans ce problème, on étudie des modèles classiques d'évolution d'une population sans interaction avec d'autres espèces. Pour ce faire, on note $X(t)$ le nombre d'individus d'une espèce A donnée présents à l'instant t . On note de plus $X_0 = X(0)$ la condition initiale. On suppose bien entendu

$$X_0 \geq 0$$

Partie I**Le modèle malthusien**

Un des modèles d'évolution les plus simples est le premier modèle introduit par Malthus en 1798. On considère ici qu'une population est dans des conditions de vie idéale (aucun prédateur, espace de vie illimité, nourriture à volonté, pas de contrainte sociale, pas de modification des conditions au cours du temps, etc...) et que seule intervient la mortalité naturelle. On propose de modéliser en disant que la vitesse de croissance est proportionnelle au nombre d'individus.

Ainsi, on pose $r \in \mathbb{R}$ tel que que X répond à l'équation différentielle :

$$X'(t) = rX(t) \tag{1}$$

où r dépend du taux de mortalité et de natalité de l'espèce.

1. Expliquer l'impact du signe de r sur l'évolution de la population.
2. Résoudre l'équation (1) vérifiant $X(0) = X_0$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\Delta > 0$ une unité de temps. On pose maintenant y_n la suite définie par

$$y_n = X(n\Delta)$$

- a) Supposons que $X_0 > 0$. Montrer que y_n est une suite géométrique et déterminer sa raison k .
- b) Que représente ce nombre k par rapport à un individu .
- c) En quoi est-ce cohérent avec la description d'évolution souhaitée ?

En réalité, le modèle de Malthus n'est valable qu'à petite échelle et sur une durée limitée. En effet, si on étudie par exemple les phénomènes de surpopulation, on s'aperçoit que plusieurs problèmes se présentent rapidement : par exemple absence de nourriture suffisante, interactions avec d'autres espèces liés au manque d'espace (qui ne peut être illimité). Sans même parler de prédation ni même de modifications des conditions de vie quand on se place à grande échelle, on est donc rapidement confronté à la limite du modèle précédent et le taux de reproduction r a donc tendance à diminuer quand on s'approche d'un certain seuil.

Pour traduire ceci, on propose donc de remplacer l'équation précédente par l'équation introduite par Verhulst en 1838 :

$$X'(t) = r \left(1 - \frac{X(t)}{K} \right) X(t) \quad (2)$$

où $r, K > 0$ et X est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

4. a) Déterminer le signe de $x \mapsto r \left(1 - \frac{x}{K} \right)$ sur $\mathbb{R}^+$.
b) En déduire pourquoi on peut appeler la constante K la "capacité d'accueil".
5. On souhaite résoudre l'équation explicitement. On admet pour la suite que toute solution X telle que $X(0) > 0$ vérifie $X(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$. Supposons pour la suite $X_0 > 0$. On pose alors $Y(t) = \frac{1}{X(t)}$ pour tout $t \geq 0$.
a) Montrer que Y est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 que l'on explicitera.
b) Résoudre l'équation trouvée pour Y sur $[0, +\infty[$.
c) En déduire qu'il existe une unique solution de condition initiale $X(0) = X_0$ à l'équation (2) qui s'écrit sous la forme

$$X(t) = \frac{\alpha}{1 + \beta e^{-rt}} \quad \forall t \geq 0$$

Expliciter α, β en fonction de K et X_0 .

6. a) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t)$.
b) Étudier les variations de X pour chacun des cas $X_0 = K$, $X_0 > K$ et $X_0 < K$.
c) Tracer l'allure des courbes dans les cas $X_0 > K$, $X_0 = K$, $X_0 < K$ sur un même graphique et interpréter les résultats obtenus.

Partie III

Le modèle de Verhulst sur un exemple

Reed et Holland, dans un de leur article publié en 1919, étudiaient la croissance de plants de tournesol et proposaient d'adapter le modèle de Verhulst pour modéliser cette croissance, c'est-à-dire au moyen de l'équation différentielle suivante :

$$X'(t) = r \left(1 - \frac{X(t)}{K} \right) X(t) \quad (3)$$

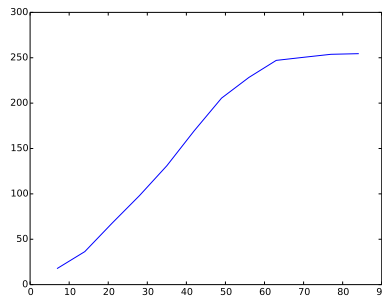
où $X(t)$ est la taille de la plante au temps $t > 0$ avec $X(0) = X_0 > 0$, $r > 0$ le taux de croissance du modèle et $K > 0$ sa capacité limite. Le but de cet exercice est, sous les conditions de modélisation annoncées, de donner une valeur approchée de K ainsi que de r .

Dans la suite, on supposera que $X(0) = X_0 < K$.

Les données publiées par Reed et Holland sont indiquées ci-contre ; les instants $t = t_1, t_2, \dots, t_n$ sont ceux où l'on a mesuré la taille du plant.

Age t_i (jours)	Taille f_i (cm)
7	17,93
14	36,36
21	67,76
28	98,1
35	131
42	169,5
49	205,5
56	228,3
63	247,1
70	250,5
77	253,8
84	254,5

La courbe dessinée avec Python est la suivante :



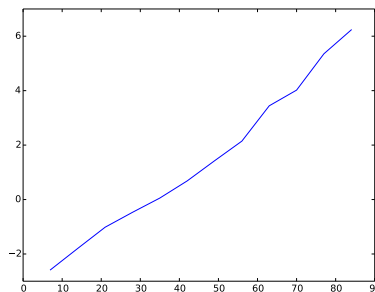
7. Proposer à partir de ces données une valeur approchée de K .

Dans la suite, on considèrera que cette valeur approchée est la valeur optimale de K . On aimerait maintenant obtenir une valeur approchée du taux de croissance r . Dans leur article, Reed et Holland proposent d'introduire la fonction auxiliaire

$$h(t) = \ln \frac{X(t)}{K - X(t)}$$

8. a) Vérifier que si X est une solution de (3) alors la courbe représentative de h est une droite affine de coefficient directeur r .
b) Montrer qu'il existe t^* tel que $X(t) = \frac{K}{2}$.
c) Vérifier que $h(t^*) = 0$.

La courbe obtenue pour les $(t_i, h(t_i))$ est la suivante :



Après rapide calcul, Reed et Holland proposent de prendre $t^* = 34,2$.

9. a) Le modèle semble-t-il correct ?
b) On pose $h_i = \ln \left(\frac{f_i}{K - f_i} \right)$ où on rappelle que f_i est la taille expérimentale mesurée à l'âge t_i . Proposer une méthode pour obtenir une valeur approchée de r en utilisant l'ensemble des valeurs $\frac{h_i}{t_i - t^*}$.
c) Proposer un programme Python permettant de faire le calcul proposé.